Rekenen-wiskunde op de basisschool

Reken-wiskundedidactiek

Marc van Zanten

ThiemeMeulenhoff

Redactie
ThiemeMeulenhoff

Opmaak binnenwerk
Studio Imago, Amersfoort

ThiemeMeulenhoff ontwikkelt leermiddelen voor: Primair Onderwijs, Algemeen Voortgezet Onderwijs, Beroepsonderwijs en Volwasseneneducatie, en Hoger Beroepsonderwijs.
Voor meer informatie over ThiemeMeulenhoff en een overzicht van onze leermiddelen: www.thiememeulenhoff.nl

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2011

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j het Besluit van 20 juni 1974, Stb. 351, zoals gewijzigd bij het Besluit van 23 augustus 1985, Stb. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.cedar.nl/pro). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) dient men zich tot de uitgever te wenden.

Woord vooraf

Dit katern hoort bij de serie Reken-wiskundedidactiek en gaat over de in de Kennisbasis rekenen-wiskunde lerarenopleiding basisonderwijs opgenomen zogenoemde globale theorie. Het is geschreven voor studenten aan de pabo. Dit katern staat niet op zichzelf. Integendeel; het vormt een kader voor de verschillende delen van de serie Reken-wiskundedidactiek. Bij aanvang van de studie is de informatiedichtheid van dit stuk nog erg groot. Naarmate studenten meer domeinspecifieke kennis ontwikkelen, zal ook de informatie uit dit stuk voor hen steeds meer betekenis krijgen. Het is dan ook niet geschreven voor een eenmalige inzet in het pabo-curriculum, maar juist om het met regelmaat terug te laten keren. Bijvoorbeeld door middel van gesprekken in de colleges, waarbij domeinspecifieke kennis expliciet wordt verbonden met de globale theorie uit dit stuk (en omgekeerd).

Op de website www.paborekenen.nl vindt u een lijst met literatuur op basis waarvan dit katern is geschreven. Een deel van die literatuur is bruikbaar als bron voor studie voor uw studenten.

De serie Reken-wiskundedidactiek bestaat uit de volgende delen:
- Rekenwijzer
- Hele getallen
- Gebroken getallen
- Verhoudingen en procenten
- Meten en meetkunde.

Een deel over het domein Verbanden is in voorbereiding.

Op www.paborekenen.nl vindt u een matrix waarin u kunt vinden waar in de boeken uit de serie Reken-wiskundedidactiek welke inhouden uit de Kennisbasis te vinden zijn.

Marc van Zanten

Inhoud

Inleiding

Om kinderen goed te leren rekenen, moet je heel wat in je mars hebben. Natuurlijk moet je zelf goed kunnen rekenen, maar dat is niet genoeg. Een vakbekwame leerkracht weet ook veel over hoe kinderen rekenen-wiskunde leren en daarmee samenhangend, hoe je rekenen-wiskunde kunt onderwijzen.
In de 'Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo' staat wat je als (aanstaand) leerkracht nodig hebt om goed reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven. Dat betreft vier vakspecifieke competenties voor rekenen-wiskunde. Allereerst moet de leerkracht zelf beschikken over een voldoende niveau van rekenvaardigheid en gecijferdheid. Ten tweede moet hij of zij rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven. In de derde plaats gaat het om het realiseren van oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen. En ten vierde moet de leerkracht het wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.

In dit katern is de zogenoemde 'globale theorie' van rekenen-wiskunde beschreven. Dat is de algemene theorie van rekenen-wiskunde, die steeds gespecificeerd terugkomt bij verschillende leerstofonderdelen, van het leren van de tafels tot het redeneren en rekenen met procenten.
Naarmate je vordert in je opleiding zul je steeds meer te weten komen over die afzonderlijke leerstofgebieden en daardoor ook steeds meer grip krijgen op deze 'globale theorie'. Het is daarom verstandig dit katern goed te bewaren en regelmatig opnieuw te lezen. Doordat je steeds meer leert en weet over al die reken-wiskundeleerstof, zul je je steeds meer kunnen voorstellen bij alle kernbegrippen en andere informatie uit dit katern.

Achtereenvolgens wordt ingegaan op inhouden en doelen van reken-wiskundeonderwijs (§ 1), leerprocessen bij rekenen-wiskunde (§ 2) en vakdidactiek rekenen-wiskunde (§ 3). Ten slotte vind je bij Meer weten over… verwijzingen naar relevante en interessante websites over rekenen-wiskunde.

1 Inhouden en doelen

Rekenen-wiskunde op de basisschool is een veelomvattend vakgebied. De leerstof loopt uiteen van tellen tot rekenen met breuken, en van klokkijken tot grafieken interpreteren. Dat de stof zoveel omvat, komt doordat rekenen-wiskunde op de basisschool voorbereidt op het vervolgonderwijs én op het functioneren in de maatschappij. Rekenen-wiskunde helpt kinderen greep te krijgen op de wereld om hen heen – denk bijvoorbeeld aan het omgaan met aantallen, hoeveelheden, betekenissen van getallen, maten en afmetingen. In de loop van de basisschooltijd komt daar steeds meer bij, zoals geld, prijzen en kosten, reizen, snelheid, schaal en verhoudingen en procenten. Bovendien leren kinderen bij rekenen-wiskunde probleemoplossen en ontwikkelen ze een onderzoekende houding. Het vakgebied omvat dus veel meer dan enkel rekenen. Vandaar ook dat het vak al sinds 1985 wettelijk ‘rekenen-wiskunde’ heet.

Inhouden van rekenen-wiskunde op de basisschool zijn:
- getallen en bewerkingen (zowel hele getallen als breuken en kommagetallen);
- verhoudingen en procenten;
- meten;
- meetkunde;
- verbanden (grafieken en dergelijke).

1.1 Gecijferdheid

gecijferdheid

Het begrip gecijferdheid kent verschillende definities, die allemaal gemeen hebben dat het gaat om het met vertrouwen tegemoet treden van de getalsmatige kant van de wereld. Ook maatinzicht en ruimtelijk inzicht zijn wezenlijke aspecten van gecijferdheid. Kort gezegd gaat het om adequaat kunnen handelen en redeneren in (alledaagse) situaties waarin getallen, getalsmatige, meetkundige en wiskundige aspecten een rol spelen. Het gaat daarbij bijvoorbeeld om het inschatten van de grootte van getallen, het gebruiken van referentiegetallen en referentiematen en het inschatten hoe bewerkingen uitpakken.
De basis voor de ontwikkeling van kinderen tot gecijferde volwassenen wordt gelegd op de basisschool. Deze ontwikkeling is aan het einde van de basisschool echter nog niet voltooid.

Dat blijkt ook wel uit de volgende aspecten uit verschillende definities van gecijferdheid:

- in het dagelijks leven kunnen schatten, hoofdrekenen en cijferen, de rekenmachine kunnen gebruiken en – afhankelijk van de situatie – een keuze kunnen maken tussen deze rekenvormen;
- correct en adequaat wiskundetaal kunnen gebruiken;
- betekenis kunnen geven aan getallen, bewerkingen, maten en het metriek stelsel;
- kunnen redeneren en rekenen met kansen, grote (en zeer kleine) getallen, en beschikken over referentiematen en -getallen voor het doen van schattingen;
- kunnen herkennen van fouten en gemanipuleer met getalsmatige informatie in media en statistieken.

1.2 Doelen

kerndoelen
Referentiekader
fundamentele doelen

De overheid in Nederland schrijft globaal de doelen van het onderwijs voor in de vorm van kerndoelen. Voor taal en rekenen zijn deze nader uitgewerkt in het Referentiekader met fundamentele doelen (voor alle leerlingen) en streefdoelen (voor zoveel mogelijk leerlingen). Voor het basisonderwijs zijn er kerndoelen, fundamentele en streefdoelen voor eind groep 8.

streefdoelen
tussendoelen en leerlijnen

Om die doelen eind groep 8 te kunnen behalen, zijn er (in opdracht van de overheid) door expertisecentra zogenoemde tussendoelen en leerlijnen geformuleerd. Deze geven informatie over de doelen per leerjaar én aanwijzingen om deze te bereiken.

lesdoelen

Al deze verschillende doelen zijn nader uitgewerkt in de verschillende reken-wiskundemethodes die bestaan. Hierin staat per jaar, per blok en per les wat de bedoelingen zijn. Ten slotte heeft de leerkracht de daadwerkelijke lesdoelen in gedachten bij het geven van de reken-wiskundeles. Hiernaast zie je dat in schema, met voorbeelden.

	Doelen	Voorbeeld
Overheid	Kerndoelen	Uit kerndoel 27: De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren.
	Referentieniveaus met fundamentele doelen en streefdoelen	Uit niveau 1F, gebruiken: Aftrekken (waaronder ook verschil bepalen) met gehele getallen.
Expertisecentra	Methode-onafhankelijke tussendoelen en leerlijnen	Uit TAL, bovenbouw basisschool, hoofdrekenen: Eind groep 6 kunnen leerlingen aftrekkingen tot 1000 oplossen met rijg-, splits- en varia-aanpakken.
Schoolspecifiek	Tussendoelen en leerlijnen van de reken-wiskunde-methode	Uit de handleiding van Alles Telt: Leerlijn basisvaardigheden optellen en aftrekken.
	Doelen en inhouden per blok	Uit de handleiding van Alles Telt: De leerlingen leren aftrekken met getallen tot en met 1000.
	Lesdoelen	De leerlingen oefenen vandaag met aftrekopgaven tot 1000 met overschrijding van 10- en 100-tallen waarbij ze de lege getallenlijn of kladpapier mogen gebruiken.

Ordening van doelen

2 Leerprocessen bij rekenen-wiskunde

Als leerkracht moet je weten wat kinderen leren bij rekenen-wiskunde, en hoe ze dat leren. Het gaat daarbij om verschillende typen kennis en om verschillende leerprocessen, die in de volgende paragrafen zijn beschreven:

- kennis bij rekenen-wiskunde;
- rekenen-wiskunde leren;
- rekenen-wiskunde leren vanuit verschillende leertheorieën.

2.1 Kennis bij rekenen-wiskunde

Bij beoefenen en leren van rekenen-wiskunde spelen verschillende typen kennis een rol. Kijk bijvoorbeeld naar de opgave hieronder, waarbij het gaat om het uitrekenen van het totaal aantal knikkers.

Welke sommen horen erbij?

Opgave uit Alles Telt, leerlingenboek 5b.

Een mogelijke manier om deze opgave op te lossen is:

1 Je realiseert je dat het gaat om de opgave 7 x 48.

2 Je lost deze opgave op door de antwoorden op de deelopgaven 7 x 40 en 7 x 8 samen te voegen: 280 + 56 = 336.

3 Je 'vertaalt' als het ware het getal 336 van de uitkomst terug naar de opgave: er zijn dus in totaal 336 knikkers. Misschien vraag je je dan nog af of dat linker zakje misschien ook had moeten worden meegeteld. Dan zou er nog eens 48 bij komen.

declaratieve kennis

Bij zo'n oplossing komen drie typen kennis kijken: declaratieve, procedurele en metacognitieve kennis. Declaratieve kennis bestaat uit feiten en weetjes. Bijvoorbeeld dat je weet dat 28 de uitkomst van 7 x 4 is, zonder dat je dat nog hoeft uit te rekenen. Het gaat hierbij dus om parate kennis. Of iets declaratieve kennis is, hangt af van de persoon. Voor kinderen die de tafel van 4 nog moeten leren, is het feit '7 x 4 = 28' nog geen declaratieve kennis.

procedurele kennis

Procedurele kennis is weten hoe je een opgave aan moet pakken, hoe je die uit moet rekenen. Bijvoorbeeld dat je weet dat je 7 x 48 uit kunt rekenen door de uitkomst van 7 x 40 samen te voegen met de uitkomst van 7 x 8. Het gaat hierbij om kennis van het uitvoeren van rekenprocedures. In ons voorbeeld is dat kennis van de zogenoemde verdeelstrategie bij vermenigvuldigen.

metacognitieve kennis

Metacognitieve kennis ten slotte is weten wanneer je welke aanpak kunt volgen en hoe je je antwoord kunt controleren. In ons voorbeeld gaat het om herkennen welke formele opgave (7 x 48) past bij de situatie met de zakjes knikkers, afwegen (ook als dat heel snel of onbewust gaat) of je dit gaat uitrekenen door gebruik te maken van de (declaratieve) kennis '48 = 40 + 8' of op een andere manier, en achteraf controleren of dit allemaal goed is gegaan (bijvoorbeeld je afvragen of misschien dat linkerzakje knikkers er ook bij had moeten worden geteld).

Eenvoudig gezegd gaat het bij declaratieve kennis om weten wat, bij procedurele kennis om weten hoe, en bij metacognitieve kennis om weten waarom. Dit onderscheid wordt ook aangehouden in het Referentiekader.

2.2 Rekenen-wiskunde leren

leerprocessen

leeractiviteiten

Bij het leren van rekenen-wiskunde spelen verschillende leerprocessen mee; van begripsvorming tot automatisering. Er is dan ook sprake van uiteenlopende leeractiviteiten, zoals probleemoplossen, verwoorden en oefenen.
In de praktijk lopen diverse leerprocessen door elkaar heen en beïnvloeden ze elkaar. Zo zijn betekenisverlening (ontwikkelen van begrip en inzicht) en vaardigheidsontwikkeling (oefenen en automatiseren) verschillende aspecten van het leren van rekenen-wiskunde, die elkaar kunnen versterken. Groeiende vaardigheid in het uitvoeren van rekenprocedures kan bijdragen aan beter begrip en omgekeerd kan meer begrip van wat je aan het doen bent weer helpen bij het vergroten van de procedurele beheersing.
Bij de verschillende leerprocessen en -activiteiten spelen mathematiseren, taal en betekenis en oefenen elk een belangrijke rol.

Mathematiseren

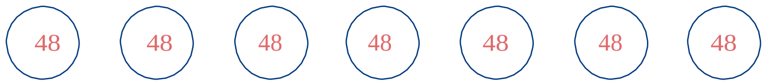
mathematiseren

horizontaal mathematiseren

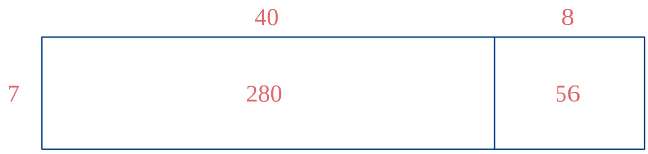
modelleren

Mathematiseren is letterlijk 'verwiskundigen'; oftewel wiskundig maken. Bijvoorbeeld: in de situatie met zakjes knikkers uit de voorbeeldopgave hierboven, de vermenigvuldiging 7 x 48 herkennen. Zo'n vertaling van een concrete situatie naar een rekenopgave wordt horizontaal mathematiseren genoemd. Het omgekeerde, het terugvertalen van het formele antwoord naar de concrete situatie (7 x 48 = 336, dus dit zijn samen 336 knikkers), valt hier ook onder. Hierbij kan een tussenstap worden gemaakt door de situatie te modelleren, bijvoorbeeld met een schematisch tekeningetje. Horizontaal mathematiseren wordt dan ook wel omschreven als het zodanig modelleren van een situatie, dat deze wiskundig kan worden aangepakt. Zo'n modellering kan dicht bij de situatie liggen, maar ook dicht bij het wiskundige oplosproces, zoals de voorbeelden hierna laten zien. Dit (leer)proces – reken-wiskundige situaties en problemen op steeds abstracter niveau op te lossen – wordt ook wel formaliseren genoemd.

formaliseren



Schematische weergave van de situatie 7 zakjes met elk 48 knikkers.



Schematische weergave van de vermenigvuldiging 7 x 48 als 7 x 40 + 7 x 8.

verticaal mathematiseren
niveauverhoging

Er bestaat ook verticaal mathematiseren. Hiermee wordt het wiskundig oplossen van een wiskundige opgave op een steeds hoger niveau bedoeld. Bij onze voorbeeldopgave kan het bijvoorbeeld gaan om de niveauverhoging van (eerst) 7 x 48 uit te rekenen door 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 48 te doen, naar (later) 7 x 40 + 7 x 8 te doen.

verkorten
compliceren

Verticaal mathematiseren slaat op het proces van uitbreiden en op steeds hoger niveau komen van wiskundige kennis en vaardigheden. Daarbij gaat het bijvoorbeeld om verkorten; het steeds korter en efficiënter uitvoeren van procedures. Maar ook om compliceren; het leren beheersen van steeds complexere zaken, zoals het (eerst) optellen en (later) vermenigvuldigen, of het (eerst) rekenen met hele getallen en (later) ook met breuken en kommagetallen.

Taal en betekenis

taal

Taal speelt een belangrijke rol bij leren, ook bij het leren van rekenen-wiskunde. Het in eigen woorden zeggen van vraagstukken en opgaven helpt bij het snappen wat precies wordt gevraagd en het bepalen welke aanpak kan worden gevolgd. Taalvaardigheid is ook van belang bij het verwoorden van eigen denkwijzen en aanpakken en het kunnen volgen van uitleg.

verwoorden

wiskundetaal

Daarnaast speelt taal een rol als het gaat om het leren van wiskundetaal; wiskundige begrippen, symbolen en notatie, en specifieke taalzaken bij rekenen-wiskunde. Wiskundige begrippen op de basisschool lopen uiteen van meer, minder en erbij, tot breuk, gemiddelde en percentage. Sommige begrippen hebben meerdere benamingen die verschillen in abstractie. Bijvoorbeeld bij optellen: het concrete 'erbij' dat in de onderbouw vaak wordt gebruikt, wordt in de loop van de tijd vervangen door het formelere 'plus'. Wiskundige symbolen zijn bewerkingstekens (+, -, x, :), vergelijkingstekens (=, ≠, ≈, <, >) en tekens als %, $\frac{b}{c}$ en b. Bij notatie gaat het bijvoorbeeld om het gebruik van komma's, punten en spaties bij het noteren van getallen en de volgorde van bewerkingen (inclusief het gebruik van haakjes). Tot slot zijn er specifieke taalkundige zaken als de namen van grote getallen (miljoen, miljard enzovoort) en benamingen als eenheden, tientallen, honderdtallen en tienden, honderdsten enzovoort.

Door dit alles is taal van groot belang voor begrip, zowel bij het horizontaal als het verticaal mathematiseren. De rol van taal bij het leren van rekenen-wiskunde is daarom een belangrijk aandachtspunt, met name bij taalzwakke leerlingen.

Oefenen

oefenen

referentiekader

Oefenen is van belang voor alle drie de typen kennis (zie § 2.1). Oefenen is belangrijk voor het opbouwen van een eigen, persoonlijk referentiekader van weetjes en feiten (declaratieve kennis). Oefenen vergroot en bestendigt rekenvaardigheid (procedurele kennis) en zogenoemde 'hogere orde'-vaardigheden, zoals probleemoplossen (waarbij metacognitieve kennis een grote rol speelt). Bij het leren van rekenen-wiskunde zorgt oefenen voor het automatiseren, memoriseren en consolideren van kennis.

automatiseren

Automatiseren is het leren routinematig – als een automatisme – uitvoeren van rekenhandelingen. Als een procedure geautomatiseerd wordt uitgevoerd, wordt er niet meer nagedacht over het hoe en waarom van de procedure. Denk aan veters strikken, autorijden of bij de opgave 7 x 48 direct 7 x 40 en 7 x 8 uit gaan rekenen.

memoriseren

Memoriseren is het uit het hoofd leren kennen van rekenfeiten. Als kennis is gememoriseerd, is het direct beschikbaar uit het geheugen. Bijvoorbeeld de parate kennis 7 x 8 = 56.

consolideren

Geautomatiseerde en gememoriseerde kennis moet worden onderhouden, anders zakt de kennis als het ware weg. Dit onderhouden wordt consolideren genoemd: beschikbaar houden. Oefenen vindt daarom gedurende de hele basisschool plaats. Daardoor kan het eigen referentiekader van kinderen zich steeds verder uitbreiden. Zoals wanneer parate tafelkennis (bijvoorbeeld 7 x 4 = 28) wordt verbonden met inzicht in de tientallige structuur van het getalsysteem, waardoor nieuwe parate kennis kan ontstaan (bijvoorbeeld 7 x 40 = 280).

2.3 Rekenen-wiskunde leren vanuit verschillende leertheorieën

Er zijn verschillende algemene leerpsychologische theorieën van belang voor het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Hier worden er als voorbeeld twee beknopt getypeerd: de handelingsleerpsychologie en het sociaal-constructivisme.

handelingsleer-psychologie

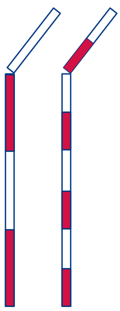
materiële handelingen

gematerialiseerde handelingen

denkhandelingen

De handelingsleerpsychologie vat leren rekenen op als een leerproces in het uitvoeren van handelingen. Handelingen worden eerst uitgevoerd met materiaal: de materiële handelingen. Een volgende stap is het verwoorden van de handelingen alsof je nog met het materiaal bezig bent. Dit worden gematerialiseerde handelingen genoemd. De laatste stap is het volledig uitvoeren van alle stappen in het hoofd. Er is dan sprake van denkhandelingen; de handelingen zijn geïnternaliseerd.

De invloed van de handelingsleerpsychologie is in het reken-wiskundeonderwijs terug te zien door het gebruik van materialen waarmee (in eerste instantie) echt kan worden gehandeld, zoals de kralenketting tot 100, of breukstokken.



Breukstokken

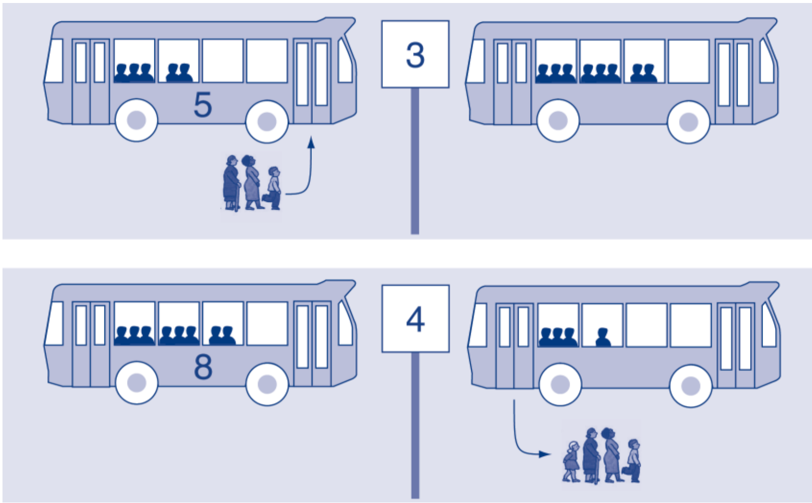
sociaal-constructivisme

Het sociaal-constructivisme vat leren rekenen op als een leerproces van in overleg en samenspraak met anderen, zelf opbouwen (construeren) van kennis. Het idee is dat kinderen belangrijke ontwikkelingen en ideeën van de wiskunde als het ware zelf (opnieuw) ontdekken. Bijvoorbeeld het 'ontdekken' van de nul als bij aftrekopgaven opeens niets overblijft (3 - 3 = ...).
Dit kan plaatsvinden als de kinderen op het juiste moment goede input krijgen: opgaven, vragen enzovoort, waardoor ze weer net een stapje verder komen. Dit proces wordt ook wel geleide herontdekking genoemd en kan plaatsvinden als kinderen nadrukkelijk worden gestimuleerd tot (zelf) wiskundig denken.

geleide herontdekking

contexten

De invloed van het sociaal-constructivisme is in het reken-wiskundeonderwijs terug te zien doordat contexten (betekenisvolle situaties) niet alleen worden gebruikt om geleerde rekenvaardigheid toe te passen, maar ook als bron voor de ontwikkeling van reken-wiskundige kennis. Bijvoorbeeld het spelen van busje in groep 2 en 3. Daarbij leren kinderen het instappen en uitstappen van passagiers herkennen als een vermeerdering (respectievelijk vermindering) van het aantal passagiers, wat vervolgens wordt geabstraheerd tot '+' (en '-').



Betekenissen van bewerkingen in het busmodel: plus als erbij komen (instappen) en min als minder worden (uitstappen). Uit Pluspunt, lesboek groep 3

3 Vakdidactiek rekenen-wiskunde

Vakdidactiek rekenen-wiskunde bestaat uit een verzameling samenhangende ideeën over en principes voor het vormgeven van onderwijs in rekenen-wiskunde. Deze geven aan hoe in reken-wiskundeonderwijs rekening kan worden gehouden met ideeën en theorieën over hoe kinderen rekenen-wiskunde leren (zoals in de vorige paragraaf beschreven). Vakdidactiek is geen statisch geheel; uitwerkingen in reken-wiskundemethodes verschillen en in de onderwijspraktijk van alledag kunnen wisselende accenten worden gelegd. Ook op 'theoretisch' niveau is vakdidactiek in ontwikkeling onder invloed van nieuw onderzoek en nieuwe ideeën over (reken-wiskunde) onderwijs.

3.1 Onderwijsleerprincipes rekenen-wiskunde

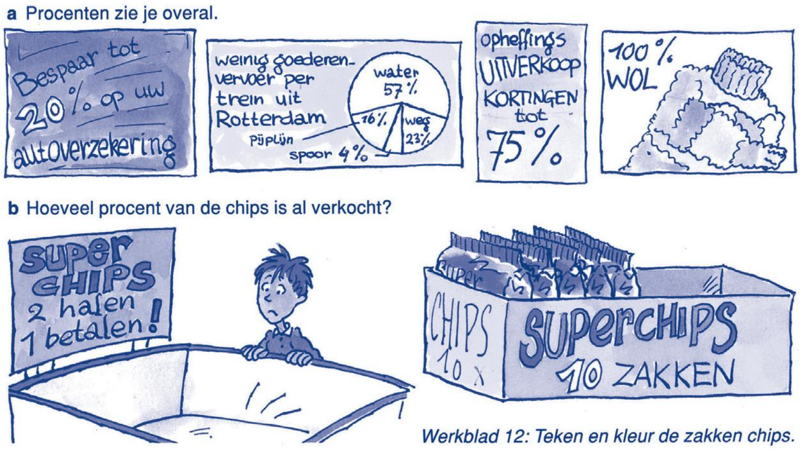
realistisch reken-wiskundeonderwijs

Een vijftal belangrijke principes van vakdidactiek rekenen-wiskunde worden samen wel aangeduid als realistisch reken-wiskundeonderwijs. Deze benaming is afgeleid van het zich realiseren, wat bij het leren van rekenen-wiskunde zo belangrijk is.

1 Mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit

contexten

Om te zorgen dat kinderen zich kunnen realiseren wat getallen en bewerkingen betekenen, wordt in het reken-wiskundeonderwijs gebruik gemaakt van contexten. Contexten zijn voor kinderen betekenisvolle problemen en situaties; kinderen moeten zich er iets bij voor kunnen stellen. Contexten kunnen afgeleid zijn van de realiteit in de zin van de alledaagse werkelijkheid. Maar ook fantasie en, in de loop van de basisschool, de formele getallenwereld horen bij de betekenisvolle realiteit van kinderen en kunnen in de vorm van contexten worden benut. Overigens is 'betekenisvol' relatief; wat voor de één betekenisvol is, daar kan de ander zich niets bij voorstellen.
Contexten kunnen op verschillende manieren worden ingezet. Op de eerste plaats kunnen ze worden gebruikt als bron voor het onderwijs: bijvoorbeeld om een nieuw probleem of domein te introduceren. Het mathematiseren gaat dan om het begrijpen van rekenen-wiskunde door de realiteit erbij te betrekken. Ten tweede worden ze gebruikt om eerder geleerde reken-wiskundige kennis en vaardigheden toe te passen. Dan werkt het mathematiseren als het ware de andere kant op; hierbij gaat het om het begrijpen (aanpakken, interpreteren) van de realiteit met rekenen-wiskunde als gereedschap.

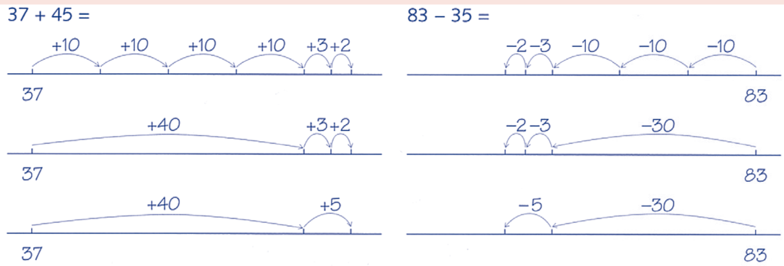


Een context als bron voor begripsvorming bij procenten. Uit De Wereld in getallen, leerlingenboek groep 7.

2 Modelleren en formaliseren

modellen
schema's
materialen

De (figuurlijke) afstand tussen contexten en formeel rekenen-wiskunde is soms groot. Om kinderen te helpen deze afstand te overbruggen worden hulpmiddelen gebruikt als modellen, schema's en (structuur-)materialen. Deze ondersteunen ook het verticaal mathematiseren, bijvoorbeeld als ondersteuning bij redeneren en rekenen. Ook hulpnotaties en het (mogen) opschrijven van deelstappen en tussenantwoorden zijn hierbij van belang.



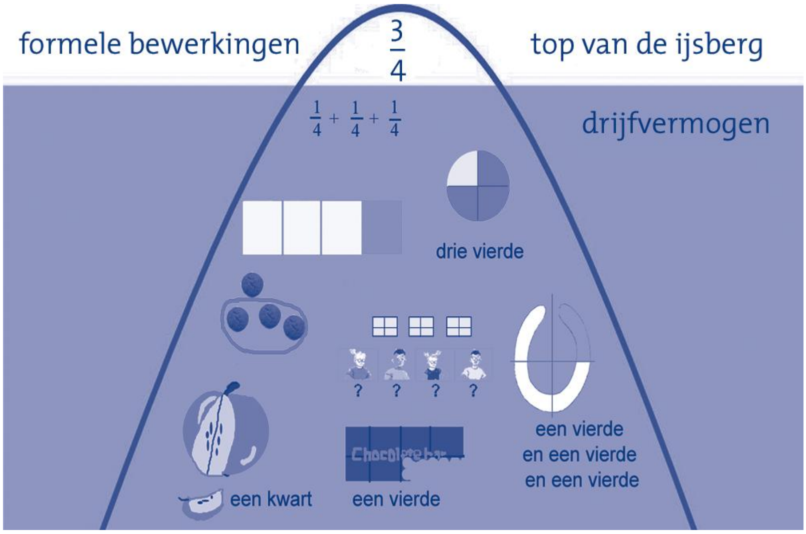
37 + 45 en 83 - 35 op de lege getallenlijn, een veelgebruikt model. Uit Rekenrijk, leerlingenboek 4b.

niveaus van abstractie
semi-formeel
formeel

Grofweg worden er bij het formaliseren drie niveaus van abstractie doorlopen: van (1) informeel, contextgebonden redeneren en rekenen, via (2) semi-formeel, modelondersteund redeneren en rekenen, tot (3) formeel, vakmatig redeneren en rekenen. Dit proces van formaliseren kan zich, afhankelijk van de leerstof, afspelen binnen kortere of langere tijd, van een les tot aan enkele jaren toe (bijvoorbeeld bij het rekenen met breuken). Op de basisschool wordt herhaaldelijk teruggegrepen op het informele en semi-for-

drijfvermogen
ijsbergmodel

mele niveau. Deze vormen het zogenoemde drijfvermogen voor het formele niveau, zoals het ijsbergmodel weergeeft.



Het ijsbergmodel. Uit Speciaal Rekenen, map Breuken.

model van kinderen
model voor de wiskunde

Niet alle modellen passen goed bij elke context of elke bewerking. Bij een goede inzet van modellen en materialen zijn de onderlinge verbanden voor kinderen logisch. In het ideale geval is een model daarom zowel een model van kinderen als een model voor de wiskunde. Dat houdt in dat:

- vanuit een concrete context kinderen zelf een modelmatige tekening (mogen) bedenken;
- deze modelmatige weergave het latere formele redeneren en rekenen ondersteunt.

In reken-wiskundemethodes staan modellen en schema's veelal voorgedrukt in de leerlingenboeken. Ook daarbij is van belang dat deze modellen zowel aansluiten op het denken van de leerlingen als op het formele rekenen-wiskunde.

3 Ruimte voor eigen inbreng van leerlingen

Vanuit de gedachte dat kinderen zelf kennis en inzicht opbouwen, is bij het leren van rekenen-wiskunde actieve en productieve inbreng van de kinderen zelf nodig. Het wiskundig denken moet bij de leerling zelf liggen. Er zijn verschillende manieren waarop dit kan worden bereikt, van relatief eenvoudig tot meer complex.

gericht oefenen
productief oefenen

Het meest eenvoudig te realiseren is om naast het reguliere, gerichte oefenen ook ruimte te maken voor productief oefenen. Dat wil zeggen dat het oefenen op een open, niet voorgestructureerde manier plaatsvindt, bijvoorbeeld door kinderen te vragen zelf opgaven te verzinnen waar steeds 10 uitkomt.

eigen producties

Een hierop aansluitende werkwijze is het laten maken van eigen producties. Bijvoorbeeld door leerlingen bij een bepaalde lesinhoud te vragen zelf een erg moeilijke en een erg makkelijke opgave te verzinnen. Zo'n vraag dwingt kinderen tot wiskundig nadenken over de lesstof. Tegelijk krijgt de leerkracht hiermee inzicht in de beheersing van de kinderen.

informele aanpak
formele werkwijze

Een derde invalshoek ten slotte is de eigen, informele aanpakken en oplossingswijzen van kinderen als startpunt te nemen van het leerproces en van daaruit te komen tot formele, verkorte werkwijzen. Dit kan door contexten en problemen te gebruiken die kinderen echt aan het denken zetten, door open vragen te stellen en door steeds de inbreng van de leerlingen te betrekken bij het verdere verloop van de les. Dit vraagt van de leerkracht inzicht in het denken en redeneren van kinderen, inzicht in het lange termijn perspectief van verschillende oplossingsstrategieën en bovendien overzicht op (langlopende) leerlijnen.

4 Interactie en reflectie

interactie

Leren van rekenen-wiskunde vindt mede plaats in interactie met anderen. In het reken-wiskundeonderwijs is veel aandacht voor het uitwisselen van ideeën en oplossingsstrategieën. Interactie tussen leerkracht en leerlingen en tussen leerlingen onderling is aan de orde bij het bespreken van een opgave, het verkennen van een nieuw onderwerp, het nadenken over een rekenprobleem en het bespreken van oplossingen. Kinderen worden zo gestimuleerd om hun aanpakken te vergelijken en de voordelen en nadelen van een aanpak op een rijtje te zetten. Door zodanige reflectie op doorlopen oplossingswijzen van jezelf en van anderen kan worden gekomen tot verkorting, abstrahering en het doorzien van wiskundige relaties tussen verschillende aanpakken.

reflectie

Interactie verloopt niet vanzelf vlekkeloos. Als de leerkracht over de hoofden van de leerlingen heen praat is geen sprake van echte interactie. Kinderen proberen dan al snel te raden wat de leerkracht in zijn of haar hoofd heeft in plaats van kritisch na te denken over een vraag. Of de leerkracht is zo gericht op het gewenste verloop van het gesprek dat hij of zij onverwachte, maar correcte inbreng van leerlingen niet als zodanig herkent.

5 Verstrengeling van leerlijnen

Veel reken-wiskunde inhouden hebben met elkaar te maken, zoals optellen en aftrekken, of verhoudingen en meetkunde. Leerlijnen worden ten behoeve van begripsvorming en toepasbaarheid met elkaar vervlochten: er is sprake van verstrengeling. Verbanden en overeenkomsten tussen verschillende leerinhouden worden expliciet gemaakt.

verstrengeling
leerlijnen

3.2 Ontwikkelingen in reken-wiskundedidactiek

In de loop der tijd veranderen vakdidactische inzichten onder invloed van nieuw onderzoek en nieuwe ideeën over leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde. Dat was zo in het verleden en zal ook altijd wel zo blijven. Inzicht in dergelijke ontwikkelingen kan je helpen om straks in je eigen onderwijspraktijk je eigen visie op reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen.

Historisch perspectief

In de aanloop naar de realistische reken-wiskundedidactiek, zijn enkele andere didactische benaderingen te onderscheiden. De voornaamste is (achteraf) wel benoemd als het mechanisme. Deze benaming is afgeleid van het gegeven dat leerlingen als het ware op een mechanistische wijze leerden rekenen. Dat wil zeggen dat de aandacht zich vooral richtte op het inslijpen van rekenregels en procedures, meer dan op het verwerven van inzicht. Uitgangspunt was dat procedurele kennis vooral verworven zou kunnen worden door veelvuldig te oefenen met opgaven op formeel niveau. Contexten speelden een ondergeschikte rol en werden voornamelijk gebruikt als toepassing.

mechanisme

Deze didactische stroming was tot in de jaren ’70 van de twintigste eeuw de leidende aanpak in het reken-wiskundeonderwijs. In de loop van de jaren ’80 en ’90 maakten mechanistische reken-wiskundemethodes steeds verder plaats voor realistische methodes.

Evenals binnen het latere realisme, werden binnen het mechanisme door reken-wiskundemethodes verschillende keuzes gemaakt en accenten gelegd. De voornaamste betrof het verschil tussen een éénsporige of een meersporige benadering. Bij de éénsporige benadering was slechts aandacht voor één bepaalde aanpak of oplossingswijze, terwijl bij de meersporige benadering wel aandacht werd geschonken aan verschillende aanpakken en oplossingsstrategieën en de onderlinge samenhang daartussen.

éénsporige benadering
meersporige benadering

Andere didactische stromingen waren het structuralisme, waarbinnen het accent lag op het benutten van wiskundige structuren, en het empirisme, waarbij veel aandacht was voor de manieren waarop wiskunde in de realiteit (de empirie) voorkomt. Beide stromingen hebben in Nederland weinig invloed gehad, al komen de hier genoemde kenmerken wel terug in de realistische stroming.

structuralisme
empirisme

Nuanceringen en kanttekeningen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs

Rond het einde van het eerste decennium van de 21e eeuw, worden enkele kanttekeningen en nuanceringen geplaatst bij (deelaspecten van) realistisch reken-wiskundeonderwijs. Zo wordt opgemerkt dat soms wordt doorgeschoten in bepaalde uitgangspunten, bijvoorbeeld dat door het belang dat wordt gehecht aan inzicht, soms gedacht wordt dat oefenen niet meer belangrijk is.

oefenen

Over oefenen wordt zowel gedacht dat veel oefenen vanzelf leidt tot inzicht, als dat inzichtelijk verworven kennis niet hoeft te worden geoefend. Dit zijn allebei misverstanden; zowel inzichtelijk leren als oefenen zijn belangrijk en kunnen eigenlijk niet los van elkaar worden gezien. Verschillende deskundigen pleiten daarom voor een vernieuwde balans tussen inzicht en oefenen.

oplossingsstrategieën

Een ander punt waarover wordt gediscussieerd is de aandacht voor verschillende oplossingsstrategieën. Het benutten van eigen, informele aanpakken van kinderen schiet soms door in aandacht voor veel verschillende strategieën waarbij weinig reflectie plaatsvindt op de effectiviteit ervan. Vooral zwakke rekenaars zien dan door de bomen het bos niet meer, is de gedachte. Helaas schiet de reactie daarop soms ook weer door, als bijvoorbeeld wordt gekozen om standaard nog maar één strategie aan te bieden voor alle leerlingen. Daarmee worden leerlingen die wel verbanden tussen verschillende rekenmanieren aankunnen tekort gedaan. Bovendien wordt dan niet voldaan aan de Kerndoelen en het Referentiekader.

cijferen

In realistische reken-wiskundemethodes is meer dan vroeger aandacht voor schatten en schattend rekenen, en minder aandacht voor cijferend rekenen. Niet verrassend zijn de prestaties van leerlingen de laatste jaren op het gebied van schatten sterk vooruit gegaan, maar op het gebied van cijferen sterk achteruit. Bovendien lijkt het erop dat leerlingen vaak fouten maken doordat zij, ook bij complexe opgaven, geen gebruik maken van uitrekenpapier. Als reactie hierop wordt gepleit voor (weer) meer aandacht voor cijferen, en – bij verschillende rekenvormen – voor het leren maken en benutten van hulpnotaties.

taligheid

Een laatste punt van kritiek dat wel wordt gehoord is dat taalzwakke leerlingen last hebben van contexten, omdat deze het rekenonderwijs te talig zouden maken. Door contexten weg te laten en zoveel mogelijk kaal en formeel te rekenen, wordt het deze leerlingen makkelijker gemaakt om te kunnen rekenen, zo wordt wel geredeneerd. Een tegenargument hierbij is dat zo voorbij wordt gegaan aan het belang van horizontaal mathematiseren voor begrip en voor het leren toepassen. Bovendien, zo benadrukken taalkundigen, moeten taalzwakke leerlingen juist als het ware worden ondergedompeld in taal om er veel van te leren. Met andere woorden; als taalzwakke leerlingen nooit worden geconfronteerd met talige opgaven bij rekenen-wiskunde, zullen ze zéker niet leren ermee om te gaan.

3.3 Tegemoetkomen aan verschillen bij rekenen-wiskunde

Kinderen verschillen bij reken-wiskundeonderwijs in veel opzichten, zoals tempo, inzicht, abstractievermogen, geautomatiseerde en gememoriseerde kennis, en het aantal denkstappen dat ze nog kunnen overzien. Onder deskundigen zijn veel verschillende opvattingen over hoe het beste om kan worden gegaan met zulke verschillen tussen kinderen bij rekenen-wiskunde. Toch vallen er wel enkele zaken aan te geven waar de meesten het wel over eens zijn.

instructiebehoefte

Sommige ideeën van realistisch rekenen-wiskunde – het gebruik van betekenisvolle contexten, modellen, schema's en (structuur)materialen – komen goed tegemoet aan de instructiebehoeften van zwakke rekenaars. Op het gebied van interactie en reflectie hebben zwakkere rekenaars echter juist extra ondersteuning nodig, omdat zij vaak moeite hebben hun denken en werkwijze onder woorden te brengen.

convergente differentiatie

instructie

verlengde instructie

methodische differentiatie

Over het algemeen wordt aanbevolen gebruik te maken van convergente differentiatie. Dat houdt kort gezegd in dat niet wordt gedifferentieerd door niveaugroepen te maken die verschillen in tempo (en daardoor steeds verder uiteen gaan lopen), maar dat de hele groep juist bij elkaar wordt gehouden. De kinderen werken dan in de lessen aan dezelfde lesstof. Binnen de les vindt differentiatie plaats naar instructie door zwakkere rekenaars na de reguliere instructie, verlengde instructie aan te bieden. Deze kan, in vergelijking met de reguliere instructie, meer sturend van aard zijn. Ook kan worden gevarieerd in de hoeveelheid opgaven die binnen een les worden gemaakt. Bij verlengde instructie en extra hulp kan waar nodig worden gewisseld tussen concreet, modelondersteund en formeel niveau. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van verschillende of meerdere contexten, modellen, materialen en oplossingsstrategieën. Dit wordt methodische differentiatie genoemd. Verder kan het werkgeheugen worden ontlast door nadrukkelijk meer tussenstappen en deelantwoorden te laten noteren.

Zowel voor zwakkere als sterkere rekenaars moet de reguliere stof worden aangepast in hoeveelheid en moeilijkheid. Het Referentiekader met fundamentele doelen en streefdoelen komt tegemoet aan het onderscheid tussen zwakkere rekenaars en (de meeste) andere rekenaars. Vrijwel alle reken-wiskundemethodes die rond 2011 verschijnen hebben dit onderscheid verwerkt. Sommige methodes geven bovendien aan welke stof specifiek voor sterke rekenaars is.

4 Meer weten over…

In het overzicht hieonder vind je een aantal relevante en interessante websites over rekenen-wiskunde. Een actuele lijst vind je op www.paborekenen.nl. Daar staat ook op welke informatie dit katern is gebaseerd.
Verwijzingen naar boeken vind je in het hoofdstuk 'Meer weten over…' dat in elk deel van de serie Reken-wiskundedidactiek staat.

De Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo	www.kennisbasis.nl
De serie Reken-wiskundedidactiek voor de pabo	www.paborekenen.nl
Gecijferdheid	www.fi.uu.nl/wiki/index.php/gecijferdheid_algemeen www.gecijferdheid.nl
Kerndoelen	www.slo.nl/primair/kerndoelen
Het Referentiekader met fundamentele en streefdoelen	www.taalenrekenen.nl/downloads/referentiekader-taal-en-rekenen-referentieniveaus.pdf
Tussendoelen en leerlijnen	www.fi.uu.nl/talbovenbouw http://tule.slo.nl/ www.fi.uu.nl/rekenlijn
Didactiek en opbrengstgericht werken rekenen-wiskunde	www.fi.uu.nl/wiki www.rekenweb.nl www.volgens-bartjens.nl www.taalenrekenen.nl www.kinderenlerenrekenen.nl http://schoolaanzet.nl
Reken-wiskundemethodes	www.leermiddelenplein.nl
Websites met goede oefeningen	http://www.fi.uu.nl/rekenweb/rekenmaar/leerlingen www.rekenbeter.nl www.fi.uu.nl/zoefi www.rekentuin.nl