

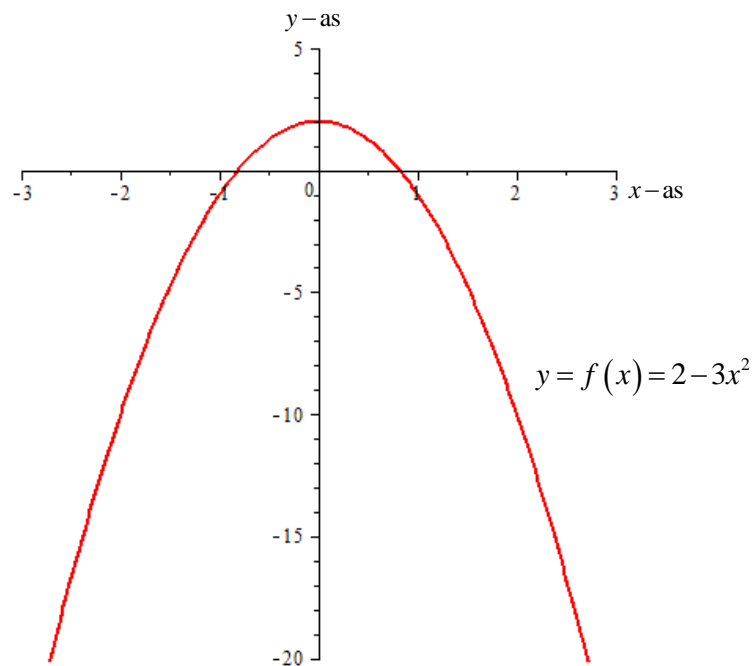


Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 5 Functies

5.1 Inleiding

Opgave 1

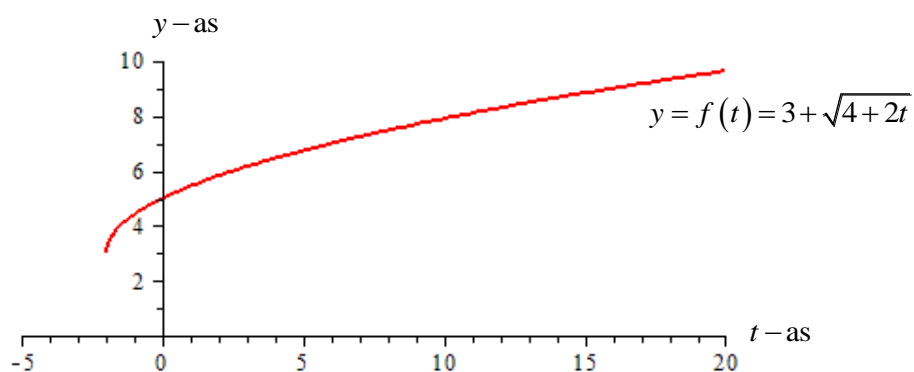
- a Voor het domein geldt $D_f = \mathbb{R}$: voor elke waarde van x bestaat de functiewaarde y
Een schets van de grafiek



Figuur 5.1

Voor het bereik geldt: $B_f = \langle -\infty, 2 \rangle$.

- b Voor het domein bedenken we dat de wortel uit een negatief getal niet bestaat, zodat moet gelden: $4 + 2t \geq 0$. De oplossing van deze ongelijkheid is: $t \geq -2$, zodat $D_f = [-2, \infty)$. Een schets van de grafiek





Figuur 5.2

Voor het bereik geldt: $B_f = [3, \infty)$.

5.2 Eerstegraadsfuncties, rechte lijnen

Opgave 1

Berekenen het functievoorschrift van de lijn die gaat door de gegeven punten.:

a $(-2, 1)$ en $(7, 3)$ in het xy -vlak.

Algemene vorm vergelijking lijn: $y = ax + b$

$$\begin{aligned} a = rc &= \frac{\text{toename } y\text{-waarde}}{\text{toename } x\text{-waarde}} \\ &= \frac{3-1}{7-(-2)} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

De vergelijking van de lijn is dan: $y = \frac{2}{9}x + b$

De lijn gaat door het punt $(-2, 1)$, dit resulteert in de vergelijking:

$$1 = \frac{2}{9} \cdot -2 + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$$

Het functievoorschrift van de lijn: $y = \frac{2}{9}x + \frac{13}{9}$.

b Invullen van de gegeven punten in $v = a \cdot t + b$ levert het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = -2 \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} a + b = 5 \\ 5a + b = -2 \end{cases} \\ \hline -4a = 7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4} \end{array}$$

Substitutie van deze waarde van a in de eerste vergelijking leidt tot:

$$-\frac{7}{4} + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 + \frac{7}{4} = \frac{27}{4}$$

Het functievoorschrift van de lijn is weer: $v = -\frac{7}{4}t + \frac{27}{4}$.

Opgave 2

a We lossen op de vergelijking $2x - 3 = -x + 5$:

$$2x - 3 = -x + 5 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

De y -coördinaat van het snijpunt: $g\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3} + 5 = \frac{7}{3}$

Het snijpunt is: $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.



Toegepaste Wiskunde inleiding

b We lossen op de vergelijking $3x - 7 = 6x + 1$:

$$3x - 7 = 6x + 1 \Leftrightarrow -3x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{3}$$

De y -coördinaat van het snijpunt: $f\left(-\frac{8}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) - 7 = -15$

Het snijpunt is: $\left(-\frac{8}{3}, -15\right)$.

5.3 Tweedegraadsfuncties, parabolen

Opgave 1

a

$$\begin{aligned}x^2 + 12x + 10 &= x^2 + 12x + 36 - 36 + 10 \\ &= (x + 6)^2 - 26\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}-2t^2 + 12t - 5 &= -2(t^2 - 6t) - 5 \\ &= -2\left((t - 3)^2 - 9\right) - 5 \\ &= -2(t - 3)^2 + 18 - 5 \\ &= -2(t - 3)^2 + 13\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}\frac{2}{5}x^2 + 4x + 3 &= \frac{2}{5}(x^2 + 10x) + 3 \\ &= \frac{2}{5}\left((x + 5)^2 - 25\right) + 3 \\ &= \frac{2}{5}(x + 5)^2 - 10 + 3 \\ &= \frac{2}{5}(x + 5)^2 - 7\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}-6x^2 + 18x + 5 &= -6\left(x^2 - 3x\right) + 5 \\ &= -6\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 5 \\ &= -6\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 5 \\ &= -6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{2} + 5 \\ &= -6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{2}\end{aligned}$$

Opgave 2

a De coëfficiënt van x^2 is 1: een positieve waarde, zodat de grafiek een dalparabool is. De top kunnen wordt berekend met kwadraatplitsen:

$$y = x^2 + 8x - 20 = (x + 4)^2 - 36$$



Toegepaste Wiskunde inleiding

De coördinaten van de top zijn: $(-4, -36)$.

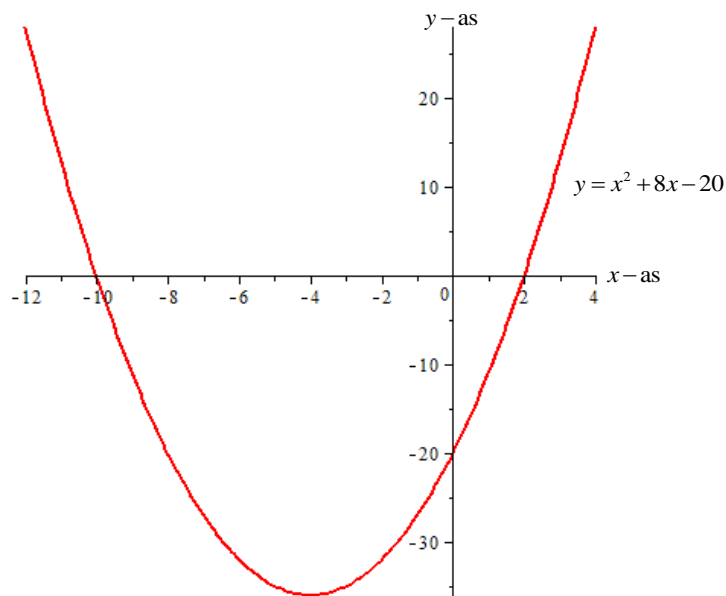
Het snijpunt met de y -as is $(0, -20)$.

De x -coördinaten van de snijpunten met de x -as zijn de oplossingen van de vergelijking: $x^2 + 8x - 20 = 0$

$$x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+10)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -10 \vee x = 2$$

De snijpunten met de x -as zijn: $(-10, 0)$ en $(2, 0)$.

Een grafiek kan nu getekend worden, zie figuur 5.3



- b De coëfficiënt van t^2 is -3 : een negatieve waarde, zodat de grafiek een bergparabool is.

De top kunnen we vinden met kwadraatplitsen:

$$\begin{aligned} s &= -3t^2 + 12t - 10 = -3(t^2 - 4t) - 10 \\ &= -3((t-2)^2 - 4) - 10 \\ &= -3(t-2)^2 + 12 - 10 \\ &= -3(t-2)^2 + 2 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn: $(2, 2)$.

Het snijpunt met de s -as is $(0, -10)$.

De snijpunten van de parabool met de t -as bepalen we met de abc -formule.

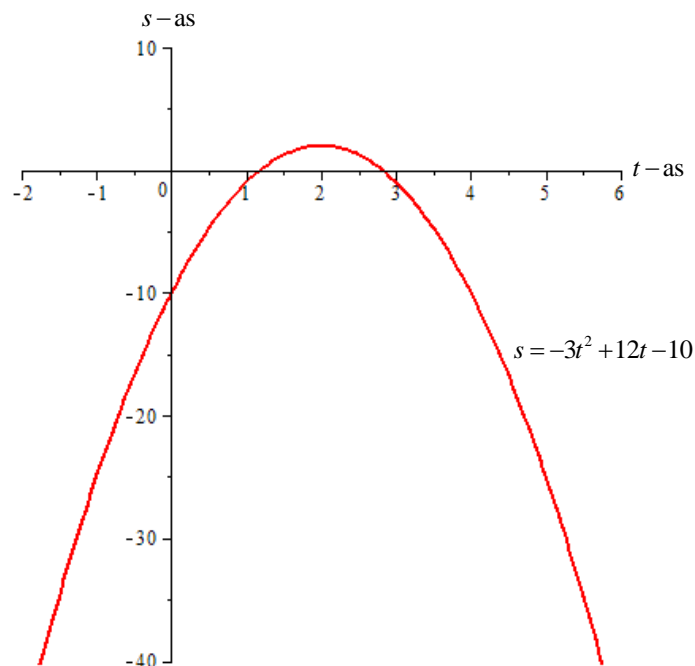
Voor de discriminant D geldt: $D = 12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-10) = 24 > 0$.

De t -coördinaten van de snijpunten met de t -as zijn:

$$t_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{24}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{6}}{-6} = 2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Snijpunten met de t -as zijn: $(2 - \frac{1}{3}\sqrt{6}, 0)$ en $(2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}, 0)$.

De grafiek kan nu getekend worden, zie figuur 5.4



Figuur 5.4

- c De coëfficiënt van x^2 is $\frac{1}{5}$: een positieve waarde, zodat de grafiek een dalparabool is.

De top berekenen we met kwadraatplitsen:

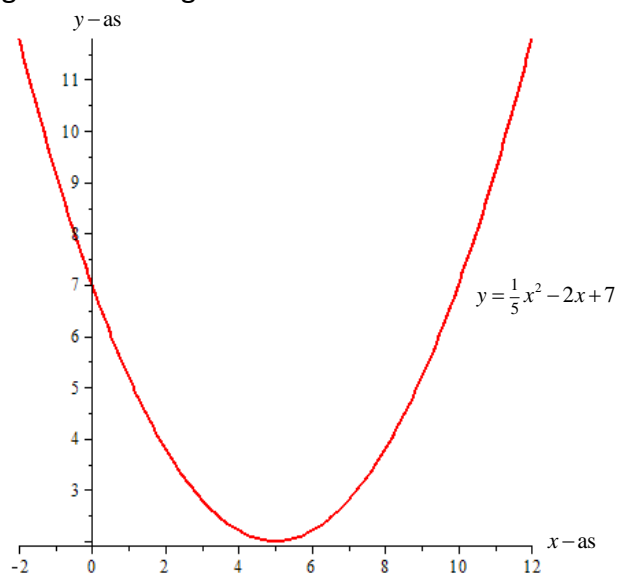
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{5}x^2 - 2x + 7 = \frac{1}{5}(x^2 - 10x) + 7 \\ &= \frac{1}{5}((x-5)^2 - 25) + 7 \\ &= \frac{1}{5}(x-5)^2 - 5 + 7 \\ &= \frac{1}{5}(x-5)^2 + 2 \end{aligned}$$

De coördinaten van de top zijn: $(5, 2)$.

Het snijpunt met de y -as is $(0, 7)$.

Er zijn geen snijpunten met de x -as, omdat de top van de dalparabool boven de x -as ligt

De grafiek is geschetst in figuur 5.5





Figuur 5.5

Opgave 3

- a De
- x
- coördinaten van de snijpunten zijn oplossingen van de vergelijking

$$x^2 - 6x + 5 = 2x + 5:$$

$$x^2 - 6x + 5 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

De bijbehorende y -coördinaten zijn:

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$

$$x = 8 \Rightarrow y = 21$$

De snijpunten zijn : $(0,5)$ en $(8,21)$

- b De
- x
- coördinaten van de snijpunten zijn oplossingen van de vergelijking

$$-x^2 + 8x + 2 = 3x^2 + 8x:$$

$$-x^2 + 8x + 2 = 3x^2 + 8x \Leftrightarrow 4x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

De bijbehorende y -coördinaten zijn:

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 4\sqrt{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + 4\sqrt{2}$$

De snijpunten zijn : $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2} - 4\sqrt{2}\right)$ en $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2} + 4\sqrt{2}\right)$

Opgave 4

- a Op te lossen vergelijking:
- $-4,9t^2 + 50t = 0$

$$-4,9t^2 + 50t = 0 \Leftrightarrow t(-4,9t + 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee -4,9t + 50 = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{50}{4,9} \approx 10,2041$$

Na 10,2041 sec is het projectiel weer op de grond.

- b Voor het domein geldt
- $D_h = [0; 10,2041]$
- :

- c,d De coördinaten van de top worden berekend met kwadraat afsplitsen.

$$h(t) = -4,9t^2 + 50t$$

$$= -4,9\left(t^2 - \frac{50}{4,9}t\right)$$

$$= -4,9\left(\left(t - \frac{25}{4,9}\right)^2 - \left(\frac{25}{4,9}\right)^2\right)$$

$$= -4,9\left(t - \frac{25}{4,9}\right)^2 + \frac{625}{4,9}$$



Toegepaste Wiskunde inleiding

Het hoogste punt wordt bereikt op tijdstip $t = \frac{25}{4,9} \approx 5,102$ sec

De maximale hoogte: $h = \frac{625}{4,9} \approx 127,551$ m

Opgave 5

We berekenen de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4p$$

a De grafiek heeft geen snijpunten met de x -as als $D < 0$:

$$D < 0 \Leftrightarrow 36 - 4p < 0 \Leftrightarrow p > 9$$

b De grafiek heeft 2 snijpunten met de x -as als $D > 0$:

$$D > 0 \Leftrightarrow 36 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < 9$$

c De grafiek heeft een raakpunt met de x -as als $D = 0$:

$$D = 0 \Leftrightarrow 36 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 9$$