



## Uitwerkingen extra opgaven hoofdstuk 4 Vergelijkingen en ongelijkheden

### 4.1 Lineaire vergelijkingen

Opgave 1

a  $3x - 5 = 7x + 11 \Leftrightarrow -4x = 16 \Leftrightarrow x = -4$

b  $-2p + 7 = \frac{2}{5}p - 3 \Leftrightarrow 10 = \frac{12}{5}p \Rightarrow p = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$

c

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}x + \frac{2}{5} &= \frac{1}{4}x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{4}\right)x = -\frac{2}{5} - \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{25}{12}x = -\frac{31}{15} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{31}{15} \cdot \frac{12}{25} = -\frac{3 \cdot 4 \cdot 31}{3 \cdot 5 \cdot 25} = -\frac{124}{125} \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{4}x + 1 &= 1\frac{5}{6}x - 2\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{13}{4}x + 1 = \frac{11}{6}x - \frac{13}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{4} - \frac{11}{6}\right)x = -\frac{18}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{17}{12}x &= -\frac{18}{5} \Rightarrow x = -\frac{18}{5} \cdot \frac{12}{17} = -\frac{216}{85} \Rightarrow x = -2\frac{46}{85} \end{aligned}$$

e  $3(x+4) - 5(2x-7) = 11 \Leftrightarrow 3x+12-10x+35=11 \Leftrightarrow 36=7x \Rightarrow x = \frac{36}{7}$

f

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}(x-1) - \frac{2}{3}(4x+5) &= x-2 \Leftrightarrow 15\left(\frac{3}{5}(x-1) - \frac{2}{3}(4x+5)\right) = 15(x-2) \\ \Leftrightarrow 9(x-1) - 10(4x+5) &= 15(x-2) \\ \Leftrightarrow 9x-9-40x-50 &= 15x-30 \Leftrightarrow -46x=29 \Rightarrow x = -\frac{29}{46} \end{aligned}$$

### 4.2 Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Opgave 1

a We elimineren de onbekende  $q$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2p + 3q = -4 \\ 5p + 6q = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -4p + 6q = -8 \\ 5p + 6q = 1 \end{cases} \\ \hline -9p = -9 \Leftrightarrow p = 1 \end{aligned}$$

Substitutie van deze waarde van  $p$  in de eerste vergelijking leidt tot:

$$-2 \cdot 1 + 3q = -4 \Leftrightarrow 3q = -2 \Leftrightarrow q = -\frac{2}{3}$$

Oplossing:  $(p, q) = \left(1, -\frac{2}{3}\right)$

b We elimineren de onbekende  $y$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x + 4y = 11 \\ 3x - 6y = -2 \end{cases} \begin{array}{l} \times 3 \\ \times 2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 33 \\ 6x - 12y = -4 \end{cases} \\ \hline 27x = 29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{27} \end{aligned}$$

Substitutie van deze waarde van  $x$  in de tweede vergelijking leidt tot:



## Toegepaste Wiskunde inleiding

$$3 \cdot \frac{29}{27} - 6y = -2 \Leftrightarrow -6y = -2 - \frac{87}{27} \Leftrightarrow -6y = -\frac{141}{27} \Leftrightarrow y = \frac{47}{54}.$$

$$\text{Oplossing: } (x, y) = \left(\frac{29}{27}, \frac{47}{54}\right)$$

c We vermenigvuldigen eerst de breuken weg

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{3}{7}x - y - 1 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \times 12 \\ \times 7 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3y = 6 \\ 3x - 7y = 7 \end{cases}$$

We elimineren de onbekende x:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 6 \\ 3x - 7y = 7 \end{cases} \begin{array}{l} \times 3 \\ \times 8 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 24x + 9y = 18 \\ 24x - 56y = 56 \end{cases} -$$

$$65y = -38 \Leftrightarrow y = -\frac{38}{65}$$

Substitutie van deze waarde van y in de eerste vergelijking leidt tot:

$$8x + 3 \cdot -\frac{38}{65} = 6 \Leftrightarrow 8x = 6 + \frac{114}{65} \Leftrightarrow 8x = \frac{504}{65} \Leftrightarrow x = \frac{63}{65}.$$

$$\text{Oplossing: } (x, y) = \left(\frac{63}{65}, -\frac{38}{65}\right)$$

$$\text{d } \begin{cases} 3a = 9 + 5b \\ 7b - 5 = 4a + 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 5b = 9 \\ -4a + 2b = 5 \end{cases}$$

We elimineren de onbekende a:

$$\begin{cases} 3a - 5b = 9 \\ -4a + 2b = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 12a - 20b = 36 \\ -12a + 6b = 15 \end{cases} +$$

$$-14b = 51 \Leftrightarrow b = -\frac{51}{14}$$

Substitutie van deze waarde van b in de tweede vergelijking leidt tot:

$$-4a + 2 \cdot \left(-\frac{51}{14}\right) = 5 \Leftrightarrow -4a = 5 + \frac{102}{14} \Leftrightarrow -4a = \frac{172}{14} \Leftrightarrow a = -\frac{43}{14}.$$

$$\text{Oplossing: } (a, b) = \left(-\frac{43}{14}, -\frac{51}{14}\right)$$

### 4.3 Tweedegraadsvergelijkingen

Opgave 1

$$\text{a } 8x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(8x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 8x + 5 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{8}$$

$$\text{b } p^2 - p = 90 \Leftrightarrow p^2 - p - 90 = 0 \Leftrightarrow (p - 10)(p + 9) = 0 \Rightarrow p = 10 \vee p = -9$$

$$\text{c } z^2 = 28 \Leftrightarrow z^2 - 28 = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{28})(z + \sqrt{28}) = 0 \Rightarrow z = -2\sqrt{7} \vee z = 2\sqrt{7}$$

$$\text{d } 5x^2 = 2x + 7 \Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -7 = 144 > 0, \text{ zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.}$$



## Toegepaste Wiskunde inleiding

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{2 \pm 12}{10}\end{aligned}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = \frac{2-12}{10} = -1 \text{ en } x_2 = \frac{2+12}{10} = \frac{7}{5}$$

e  $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -24 < 0$ , zodat er geen reële oplossingen zijn.

f  $\frac{2}{5}x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x - 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 440 > 0$ , zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-20) \pm \sqrt{440}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{20 \pm \sqrt{4 \cdot 110}}{4} \\ &= \frac{20 \pm 2\sqrt{110}}{4} \\ &= 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{110}\end{aligned}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{110} \text{ en } x_2 = 5 + \frac{1}{2}\sqrt{110}$$

g  $(5x+1)(x-3) = 4 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 7 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -7 = 336 > 0$ , zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-14) \pm \sqrt{336}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{14 \pm \sqrt{16 \cdot 21}}{10} \\ &= \frac{14 \pm 4\sqrt{21}}{10} \\ &= \frac{7}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{21}\end{aligned}$$

De oplossingen zijn:

$$x_1 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{21} \text{ en } x_2 = \frac{7}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{21}$$



Opgave 2

a

$$\begin{aligned}2(x-5)^2 &= -3(x-5) \Leftrightarrow 2(x-5)^2 + 3(x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(2(x-5)+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)(2x-7) = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \vee 2x-7 = 0 \\ &\Rightarrow x = 5 \vee x = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}2(3y-4)^2 &= 10 \Leftrightarrow (3y-4)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (3y-4-\sqrt{5})(3y-4+\sqrt{5}) = 0 \\ &\Rightarrow 3y-4-\sqrt{5} = 0 \vee 3y-4+\sqrt{5} = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5} \vee y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{5}\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}2(x+7)(2x+9) &= (x+7)(x-4) \Leftrightarrow (x+7)(2(2x+9)-(x-4)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+7)(3x+22) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+7 = 0 \vee 3x+22 = 0 \\ &\Rightarrow x = -7 \vee x = -\frac{22}{3}\end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned}(x-2)(x+5)(4x-1) &= (x-2)^2(x+5)(x-1) \Leftrightarrow (x-2)(x+5)(4x-1-(x-2)(x-1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+5)(4x-1-(x^2-3x+2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+5)(-x^2+7x-3) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \vee x = -5 \vee x^2 - 7x + 3 = 0\end{aligned}$$

Oplossen van  $x^2 - 7x + 3 = 0$ :

$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 37 > 0$ , zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{37}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2} \\ &= \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{37}\end{aligned}$$

De oplossingen zijn:

$$x = -5, x = 2, x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37} \text{ en } x = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$$



#### 4.4 Gebroken vergelijkingen

##### Opgave 1

- a Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met  $x-2$ , onder de voorwaarde dat  $x-2 \neq 0$ , dus  $x \neq 2$ .

$$\frac{3}{x-2} = 1\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} = \frac{7}{5} \Rightarrow 7(x-2) = 15 \Rightarrow 7x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{7}$$

Oplossing voldoet

- b Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met  $x-3$  en  $x^2-9$ , onder de voorwaarde dat  $x \neq 3$  en  $x \neq -3$ .

$$\frac{2}{x^2-9} = \frac{5}{x-3} \Rightarrow 2(x-3) = 5(x^2-9) \Rightarrow 2(x-3) = 5(x-3)(x+3)$$

$$\Rightarrow (x-3)(2-5(x+3)) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(-5x-13) = 0$$

$$\Rightarrow x-3 = 0 \vee -5x-13 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \vee x = -\frac{13}{5}$$

Oplossing  $x = 3$  voldoet niet zodat de oplossing is  $x = -\frac{13}{5}$

- c We tellen de breuken in het linkerlid op en gebruiken:  $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ , mits  $B \neq 0$ .

$$\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x(x-3) - 3(x-3) + x^2}{x^2(x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 - 18x + 9}{x^2(x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{3(2x^2 - 6x + 3)}{x^2(x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0, \text{ mits } x \neq 0 \text{ en } x \neq 3$$

Oplossen van  $2x^2 - 6x + 3 = 0$ :

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 12 > 0$ , zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Deze oplossingen voldoen

We kunnen de vergelijking ook oplossen door linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met  $x^2$  en  $x-3$ , onder de voorwaarde dat  $x \neq 3$  en  $x \neq 0$ .

- d Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met  $(p+3)^2$ , onder de voorwaarde dat  $p \neq -3$ .



$$\frac{p^2 - p + 3}{p^2 + 6p + 9} = \frac{2p - 1}{p + 3} \Leftrightarrow \frac{p^2 - p + 3}{(p + 3)^2} = \frac{2p - 1}{p + 3}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - p + 3 = (2p - 1)(p + 3)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - p + 3 = 2p^2 + 5p - 3$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 6p - 6 = 0$$

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6 = 60 > 0$ , zodat er 2 verschillende oplossingen zijn.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{2} \\ &= -3 \pm \sqrt{15}\end{aligned}$$

Deze oplossingen voldoen

#### Opgave 2

- a Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met  $x - 1$  en  $6$ , en lossen vervolgens  $x$  op uit de zo ontstane vergelijking op.

$$\frac{5}{x-1} = \frac{1}{6}(z+3) \Rightarrow 30 = (z+3)(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{30}{z+3} \Rightarrow x = \frac{z+33}{z+3}$$

- b Linker- en rechterlid worden vermenigvuldigd met  $ax$  en  $c$ , en lossen vervolgens  $x$  op uit de zo ontstane vergelijking op.

$$\frac{b+2x}{ax} = \frac{3c-b}{c} \Rightarrow (b+2x)c = (3c-b)ax$$

$$\Rightarrow bc + 2cx = (3ac - ab)x$$

$$\Rightarrow x(3ac - ab - 2c) = bc$$

$$\Rightarrow x = \frac{bc}{3ac - ab - 2c}$$

### 4.5 Lineaire ongelijkheden

#### Opgave 1

a  $-3x + 7 \leq -4 \Leftrightarrow 11 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{11}{3}$

b  $4x + 5 \geq 7x - 9 \Leftrightarrow 14 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{14}{3}$



## Toegepaste Wiskunde inleiding

c

$$\frac{3}{5}x - 2 > \frac{5}{3} + \frac{9}{10}x \Leftrightarrow \frac{3}{5}x - \frac{9}{10}x > \frac{5}{3} + 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{10}x > \frac{11}{3} \Leftrightarrow -\frac{11}{3} > \frac{3}{10}x$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{11}{3} \cdot \frac{10}{3} \Leftrightarrow x < -\frac{110}{9}$$

d

$$-(3p-7)-10 \leq 12+4(p-1)+2p \Leftrightarrow -3p+7-10 \leq 12+4p-4+2p$$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 9p \Rightarrow p \geq -\frac{11}{9}$$



## Toegepaste Wiskunde inleiding

$$D=0 \Leftrightarrow 36-4p=0 \Leftrightarrow p=9$$